Konstruktywizm a metamatematyka

Jan Woleński
UJ, Kraków

Intuicjoniści odrzucają część logiki, a uznają arytmetykę liczb naturalnych bez zastrzeżeń, uważając ją za pewną i niesprzeczną. Formaliści, przynajmniej w oryginalnej wersji programu Hilberta, wprawdzie akceptują logikę klasyczną, ale zasada indukcji matematycznej wykracza ich zdaniem poza metody finitystyczne. Intuicjonizm jest konstruktywizmem niejako ex definitione, a formalizm finitarny też może być rozumiany jako program konstruktywistyczny. Tedy, oba te konstruktywizmy są różne i to istotnie. Z punktu widzenia logiki, intuicjonizm jest „bardziej" konstruktywny niż formalizm, ale sprawa ma się przeciwnie względem arytmetyki. Powstaje pytanie, właściwie w jakim języku ta różnica jest wyrażalna, spełniającym rygory konstruktywizmu czy bardziej liberalnym. Przykład ten ilustruje znany problem niewyraźnej granicy pomiędzy metodami konstruktywnymi i nie-konstruktywnymi.

Wskazana kwestia może być postawiona bardziej formalnie. Przyjmijmy, że konstruktywne jest to, co daje się wyrazić w arytmetyce liczb naturalnych. Tak więc arytmetyzacja nie wykracza poza metody konstruktywne, a to samo dotyczy arytmetycznych metod dowodzenia. Jest to dość liberalne, wydaje się, że minimalne rozumienie konstruktywizmu. Wiadomo, że arytmetyka Peano daje się wyrazić w arytmetyce Heytinga. Na pierwszy rzut oka jest to punkt dla intuicjonizmu, ponieważ sugeruje, że logika nie ma w tej materii znaczenia. Ten sukces intuicjonizmu jest jednak wątpliwy, ponieważ arytmetyka Heytinga podlega twierdzeniom Gödla. Znaczy to m. in., że niesprzeczność arytmetyki nie daje się udowodnić w niej samej, a więc nie jest dowodliwa konstruktywnie. Intuicjoniści nie mogą kwestionować tego rezultatu, ponieważ jest on ustalony metodami przez nich akceptowanymi. Z drugiej strony, bodaj najważniejszy atrybut poprawnych teorii matematycznych (w trym przypadku arytmetyki i pewnych jej rozszerzeń) jest przedmiotem wiary a nie wiedzy matematycznej.

Jest rzeczą wątpliwą, czy rozważony przykład daje się w pełni wyrazić w (meta)języku intuicjonistycznym. W ogólności, wiele istotnych twierdzeń metamatematycznych, np. twierdzenie o pełności nie ma konstruktywnego dowodu, nie tylko dla klasycznego rachunku predykatów, ale także dla intuicjonistycznego. Sugeruje to, że metajęzyk, w którym formułuje się twierdzenia i dowody metamatematyczne wykracza nawet poza liberalny konstruktywizm.