



Ciągłość vs kontinuum. Rewizja stanowiska Zenona z Elei i jego współczesnych krytyków

Piotr Błaszczyk
(UP, Kraków)

1. Paradoksy Zenona z Elei, Dychotomia i Achilles, rekonstruujemy z perspektywy matematyki greckiej. W Dychotomii odnajdujemy konstrukcję platońską [Euklides, *Elementy*, I.10], w Achillesie -- „mechaniczną”: zakładając istnienie ruchu, na prostej definiowany jest ciąg punktów („ciąg Zenona”). Przyjmujemy, że w *przestrzeni* Zenona, tak jak w *przestrzeni* Euklidesa, spełniony jest aksjomat Pasch'a (podstawa konstrukcji dychotomia odcinka).
2. Paradoks Achilles sprowadzamy do rozumowania: Aby prześcignąć żółwia Achilles musi go najpierw dogonić. W żadnym punkcie „ciągu Zenona” Achilles nie dogania żółwia, w którym zatem punkcie Achilles dogania żółwia?
3. „Klasyczne rozwiązanie” paradoksu (Ajdukiewicz 1948, Grünbaum 1967) polega na wyznaczeniu punktu, t_0 , w którym Achilles dogania żółwia -- punkt ten jest granicą „ciągu Zenona”. *Przestrzeń* „rozwiązania klasycznego” to ciało liczb rzeczywistych, tj. ciało uporządkowane w sposób ciągły.
4. Rozszerzamy ciało liczb rzeczywistych do ciała niestandardowych liczb rzeczywistych NSA (porządek w tym ciele nie jest ciągły). *Przestrzeń* NSA jest modelem geometrii Euklidesa, a jednocześnie można w niej *odtworzyć* przejścia graniczne klasycznej analizy. Przedstawiając „ciąg Zenona” oraz „klasyczne rozwiązanie” na osi NSA pokazujemy, że w punkcie t_0 Achilles nie dogania żółwia.
5. I w rozumowaniu Zenona, i w „rozwiązaniu klasycznym” znajdujemy tę samą presupozycję: aby prześcignąć żółwia, Achilles musi go najpierw dogonić, musi istnieć punkt, w którym Achilles dogania żółwia. Wiążemy to z wywodzącym się od Arystotelesa przekonaniem, że przestrzeń, ruch i czas są ciągłe w tym samym sensie.
6. Odróżniając ciągłość ruchu (funkcji) od ciągłości przestrzeni, czasu (dziedziny funkcji), pokazujemy, że w przestrzeni NSA, nawet gdy bieg Achillesa, $A(t)$, i żółwia, $T(t)$, są ciągłe, a Achilles przegoni żółwia, wcale nie musi być tak, że istnieje punkt, t_0 , w którym Achilles dogonił żółwia, $A(t_0)=T(t_0)$. Fakt ten *podważa* podstawową przesłankę paradoksu Achilles.