Euklides i Arystoteles o kontinuum

Piotr Błaszczyk

1. Przedstawiamy interpretację wypowiedzi Arystotelesa na temat kontinuum oraz interpretację tych partii *Elementów* Euklidesa, które traktują o wielkościach geometrycznych. *Elementy* opisujemy językiem współczesnej matematyki, tezy Arystotelesa – językiem *Elementów*.

2. Arystoteles odróżnia dwa rodzaje ilości: rozdzielną i ciągłą. Do pierwszego rodzaju zalicza liczby, do drugiego – odcinki, figury płaskie, bryły.

W *Elementach* zrazu znajdujemy wyraźny podział na geometrię (Księgi I–VI) oraz arytmetykę (Księgi VII–IX); odpowiednio rozwinięte są też dwie teorie proporcji: wielkości geometrycznych (Księga V) oraz liczb (Księga VII). W Księdze X stosunki liczb porównywane są ze stosunkami wielkości.

Wielkości geometryczne dzielone są na rodzaje: odcinki, trójkąty, kwadraty, prostokąty, kąty, łuki. Każdy rodzaj tworzy odrębną strukturę algebraiczno- -porządkową $\mathfrak{M} = (M, +, <)$, w szczególności mamy strukturę odcinków $\mathfrak{M}_o$, trójkątów $\mathfrak{M}_t$, itd. Na podstawie definicji V.5 porównywane są stosunki wielkości geometrycznych różnego rodzaju.

3. Arystotelesa teoria kontinuum i Euklidesa teoria wielkości odnoszą się do obiektów geometrycznych, ale opisują ich różne aspekty. Nauka Euklidesa zawarta jest w aksjomatach struktury $\mathfrak{M}$:

0mm

(E1) $\forall A, B \exists n \in \mathbb{N}[nA > B]$,

(E2) $A > C \rightarrow \exists E[C + E = A]$,

(E3) $A > C \rightarrow A + B > C + B$,

(E4) $\forall A \forall n \in \mathbb{N} \exists B[nB = A]$,

(E5) $\forall A, B, C \exists X[A : B :: C : X], \quad A, B, C, E, X \in M$,

gdzie $+$ jest działaniem wewnętrznym, łącznym i przemiennym, zaś $<$ porządkiem liniowym na M. Nauka Arystotelesa streszcza się w tezach:

(A1) “kontinuum składa się z części",

(A2) “ich stykające się granice są te same i zawierają się w sobie nawzajem",

(A3) części te są “podzielne w nieskończoność".

Pojęcia “składania się" i “podzielności" nie są definiowane w *Elementach*; ich sens matematyczny wyprowadzamy z interpretacji pojęć “całość", “część". Tezy (A2)–(A3) odnajdujemy wprost w definicjach i twierdzeniach geometrii Euklidesa.

Na podstawie *Elementów* i w odniesieniu do odcinka, aksjomaty (A1)-(A3) interpretujemy jak następuje:

(A1) “Podzielność" odcinka L, czy inaczej to, że L “składa się z części" wyrażamy formułą $L = L_1 + L_2$, dla pewnych odcinków L_1, L_2.

(A2) To, że “granice" L_1, L_2 “zawierają się w sobie nawzajem" wynika z definicji I.3.

(A3) “Nieskończona podzielność" oznacza, że każda z “części" L_1, L_2 może być przedstawiona podobnie jak L, tj. $L_1 = L_1' + L_1''$, $L_2 = L_2' + L_2''$. Dowód tego faktu zawiera twierdzenie I.10.

4. Modelowym przykładem kontinuum tak dla Arystotelesa, jak i Euklidesa jest odcinek. Charakterystyka (A1)–(A3) jest zapisem przekonań dotyczących *budowy* odcinka. Aksjomaty (E1)–(E5) natomiast charakteryzują nie pojedynczy odcinek, ale strukturę odcinków. Pokazujemy, że we współczesnej matematyce podejście Arystotelesa znajduje kontynuację w topologicznej charakterystyce kontinuum [Cantor 1883], zaś Euklidesa opis struktury odcinków znalazł rozwinięcie w pojęciu ciała uporządkowanego [Hilbert 1900] i grupy uporządkowanej [Weber 1895], [Hölder 1901]. Ten drugi wątek związany jest wykształceniem się nowego modelu kontinuum jakim jest ciało uporządkowane w sposób ciągły.

Literatura

1. Bekker I. (ed.), *Aristotelis Opera*, Berlin 1831.
2. Cantor G., *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 1883; *O nieskończonych liniowych rozmaitościach punktowych*, §9-10, tł. J. Pogonowski, Poznań 2010 (maszynopis).
3. Euklides, *Elementy, Księgi V–VI*, tł. P. Błaszczyk, K. Mrówka, Kraków 2011 (maszynopis).
4. Heiberg J.L. (ed.), *Euclidis Elementa*, Leipzig 1883-1885.
5. Hilbert D., *Über den Zahlbegrieff*, 1900; *O pojęciu liczby*, tł. J. Pogonowski, [w:] Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV, 2011; http://www.up.krakow.pl/mat/annal-dyd/.
6. Hölder O., *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, 1901.
7. Weber H., *Lehrbuch der Algebra. Einleitung*, Braunschweig 1895; *Podręcznik Algebry. Wprowadzenie*, tł. J. Pogonowski, Poznań 2010 (maszynopis).